

Chapitre 9

Équations différentielles

Plan du chapitre

1	Généralités sur les ED	1
1.1	Vocabulaire des ED	1
2	ED linéaires du premier ordre	2
2.1	Vocabulaire	2
2.2	Principe de résolution (ordres 1 et 2)	3
2.3	Étape 1 : solution générale de E_H (notée y_H)	4
2.4	Étape 2 : solution particulière de E (notée y_p)	6
2.5	Conditions initiales	7
2.6	Cas avec a et b constants	9
3	ED linéaires du second ordre à coefficients constants	10
3.1	Étape 1 : solution générale de E_H	10
3.2	Étape 2 : solution particulière de E	13
3.3	Principe de superposition	16
3.4	Conditions initiales	18
4	Compléments	19
4.1	Une conséquence de Cauchy-Lipschitz (ordre 1)	19
4.2	ED d'ordre 1 non résolue : $r(t)y' + a(t)y = b(t)$ – raccord de solution	19
4.3	Les “astuces” des physiciens... (HORS PROGRAMME)	22
5	Méthodes pour les exercices	24

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial.

1 Généralités sur les ED

1.1 Vocabulaire des ED

Une équation différentielle (ou ED) est une équation entre fonctions qui fait intervenir une fonction inconnue (en général notée y) ainsi qu'au moins une de ses dérivées. Toutes les équations suivantes sont des ED :

$$E_1 : y' - y = 0$$

$$E_2 : 4y'' + x^2y = \tan x$$

$$E_3 : yy'' + 2\ln(x)y' = e^x + 1$$

Remarque. Les rôles des différentes lettres sont sous-entendus dans les ED :



- La fonction inconnue, ici y , correspond à la seule lettre qui est “dérivée” dans l’écriture de l’équation.
- Si une autre lettre apparaît, comme x dans E_2 et E_3 , il s’agit typiquement de la variable de la fonction inconnue y .

Ainsi, pour E_2 , on cherche toutes les fonctions $y : x \mapsto y(x)$ qui soient deux fois dérivables et telles que pour tout x pour lequel cela a un sens :

$$4y''(x) + x^2y(x) = \tan x$$

Autre abus : dans (E_2) , $4y'' + x^2y$ est une alors que $\tan x$ est un de sorte qu’on écrit une égalité qui n’a pas de sens. Ce qu’on sous-entend, c’est que x^2 et $\tan x$ désignent en fait les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \tan x$, et (E_2) constitue une égalité entre fonctions :

$$4y'' + fy = g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f : x \mapsto x^2 \\ g : x \mapsto \tan x \end{cases}$$

Utiliser les lettres y et x est un choix fréquent mais arbitraire : les équations E_1 , E_2 et E_3 pourraient se réécrire

$$\begin{array}{ll} E_1 : & x' - x = 0 & (\text{fonction } x) \\ E_2 : & 4y'' + ty = \tan t + 1 & (\text{fonction } y, \text{ variable } t) \\ E_3 : & tx'' + 2 \ln(t)x' = e^t & (\text{fonction } x, \text{ variable } t) \end{array}$$

Une ED est dite du premier ordre si la plus grande dérivée de y qui apparaît est y' (pas de terme en y'' , en y''' , etc.). Une ED est dite du deuxième ordre si la plus grande dérivée de y qui apparaît est y'' . Dans ce chapitre, on se limitera à des ED d’ordre 1 ou d’ordre 2.

Un intervalle d’étude d’une ED est un intervalle I , le plus large possible, sur lequel toutes les fonctions de l’équation sont bien définies :

- Pour E_1 , l’intervalle d’étude est donné par : $I = \dots\dots\dots$
- Pour E_2 , un intervalle d’étude possible est donné par : $I = \dots\dots\dots$
- Pour E_3 , l’intervalle d’étude est donné par : $I = \dots\dots\dots$

Il arrive qu’on impose des conditions initiales sur y : par exemple $y(0) = y_0 \in \mathbb{K}$ et/ou $y'(0) = y_1 \in \mathbb{K}$. On doit alors trouver une fonction qui vérifie l’équation ainsi que les conditions initiales.

Résoudre une ED, c’est trouver, sur un intervalle d’étude I , **toutes** les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifient l’équation et les éventuelles conditions initiales.

2 ED linéaires du premier ordre

2.1 Vocabulaire

Définition 9.1 – ED linéaire (ordre 1 ou 2)

Une ED est dite linéaire d’ordre 1 (résolue) si elle est de la forme

$$E : \quad y' + a(x)y = b(x)$$

avec a et b des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Une ED linéaire d'ordre 1 non résolue est une ED de la forme

$$r(x)y' + a(x)y = b(x)$$

avec r une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- $r(x)$ et $a(x)$ sont appelés les coefficients de l'équation.
- $b(x)$ est appelé le second membre de l'équation.

Nous allons voir une méthode générale pour résoudre une équation résolue sur un intervalle d'étude I donné. Le cadre sera donc le suivant :

Hypothèse

On considère une ED

$$E : y' + a(x)y = b(x)$$

avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions *continues* données (donc en particulier on peut calculer leur intégrale).

Définition 9.2

L'équation homogène associée à E est l'ED où le second membre est remplacé par 0 :

$$y' + a(x)y = 0$$

On notera typiquement E_H l'équation homogène associée à E , mais ce n'est pas une notation officielle.

2.2 Principe de résolution (ordres 1 et 2)

Pour résoudre E , il faut suivre 3 étapes :

1. Résoudre E_H , donc trouver **toutes** les solutions de E_H . On dira qu'on cherche une solution *générale* de E_H .
2. Chercher **une** solution quelconque de E . On dira qu'on cherche une solution *particulière* de E_H .
3. On en déduit **toutes** les solutions de E grâce au résultat suivant.

Théorème 9.3

Soit E une ED linéaire et $y_p : I \rightarrow \mathbb{K}$ une solution particulière (quelconque) de E sur I . Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- y est une solution de E sur I .
- Il existe une solution y_H de E_H sur I telle que

$$\forall x \in I \quad y(x) = y_p(x) + y_H(x)$$

Démonstration. On fait la preuve lorsque E est une ED résolue d'ordre 1, mais ce théorème marche aussi pour des ED d'ordre 2 (et même d'ordre quelconque) et/ou non résolues.

□

2.3 Étape 1 : solution générale de E_H (notée y_H)

Théorème 9.4

Toutes les solutions de $y' + a(x)y = 0$ sur I sont exactement les fonctions $y_H : I \rightarrow \mathbb{K}$ de la forme

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{K}$$

où $A : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive (quelconque) de a .

Démonstration.

□

Une fois qu'on a trouvé une solution particulière y_p , par le Théorème 9.3, y est solution de E sur I si et seulement si

$$\forall x \in I \quad y(x) = y_p(x) + Ce^{-A(x)} \quad (*)$$

avec $C \in \mathbb{K}$.

Remarque. Chaque valeur de C dans $(*)$ donne une solution différente : il y a donc une infinité de solutions pour l'équation E . C'est le cas pour toute ED linéaire.

9.5 ★★ Résoudre $y' + \operatorname{th}(x)y = 2 \operatorname{sh}(x)$.

Solution.

2.4 Étape 2 : solution particulière de E (notée y_p)

Deux méthodes sont possibles pour trouver y_p : ou bien on trouve une solution “évidente” comme à section 2.6, ou bien on utilise la méthode de la variation de la constante.

On rappelle que lorsqu’on résout E_H , on obtient une solution “générale” de E_H de la forme suivante :

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{K}.$$

Méthode – Variation de la constante

On cherche une solution particulière $y_p : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $y_p' + a(x)y_p = b(x)$. On pose y_p de la même forme que y_H mais où la constante C est remplacée par une fonction inconnue $C(x)$:

$$y_p(x) = C(x)e^{-A(x)} \quad \text{avec } C : I \rightarrow \mathbb{K}$$

Pour trouver $C(x)$, on injecte cette expression de y_p dans E , ce qui donne après simplifications :

$$y_p' + a(x)y_p = b(x) \iff \dots \iff C'(x) = \text{”fonction}(x)\text{”}$$

Ainsi, pour obtenir $C(x)$, toute primitive de $x \mapsto \text{”fonction}(x)\text{”}$ sur I convient.

Remarque. Si on note f la fonction $x \mapsto \text{”fonction}(x)\text{”}$, alors pour trouver une primitive de f , on peut fixer $x_0 \in I$ comme on le souhaite et poser :

$$C(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

La fonction $C : x \mapsto C(x)$ choisie est alors l’unique primitive de f qui s’annule en x_0 . Chaque valeur de x_0 conduit à une fonction C différente et donc à une solution particulière y_p différente. Comme on a juste besoin d’une seule solution particulière, on prend la valeur de x_0 la plus simple possible (par exemple $x_0 = 0$ si $0 \in I$).

9.6 ★★ Résoudre $y' + 4xy = \ln(2x)e^{-2x^2}$.

Solution.

2.5 Conditions initiales

Dans cette section, on notera t la variable des fonction y , a et b .

Définition 9.7 – Problème de Cauchy (ordre 1)

Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues et $(t_0, \alpha_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le système

$$(PC) : \begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = \alpha_0 \end{cases}$$

est appelé un problème de Cauchy (ici linéaire, d'ordre 1)

Théorème 9.8 – Théorème de Cauchy-Lipschitz (ordre 1)

Pour chaque couple $(t_0, \alpha_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution $y : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Un problème de Cauchy correspond à un phénomène d'évolution d'une "grandeur" $y(t)$ en fonction du temps t . Une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz est que :

- Si on connaît la valeur de $y(t)$ en un temps initial t_0 (condition $y(t_0) = \alpha_0$ avec α_0 donné et connu)...
- ... et si on connaît la loi d'évolution de $y(t)$, c'est-à-dire l'ED vérifiée par y ...
- ... alors on peut déterminer la valeur (unique) de $y(t)$ pour tous les temps t .

Méthode

Pour résoudre un problème de Cauchy :

1. On détermine l'intervalle d'étude I (le plus grand possible) qui contient t_0 .
2. On résout $y' + a(t)y = b(t)$ sur I : la solution dépendra d'une constante $C \in \mathbb{K}$.
3. On détermine l'unique valeur de C telle que $y(t_0) = \alpha_0$.

9.9

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + \frac{1}{t}y = 0 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

Solution.

Remarque. Puisque chaque problème de Cauchy admet une et une seule solution, on peut conclure *sans calcul* si on trouve ladite solution d'entrée de jeu :

Solution (Solution alternative au exercice [9.9](#)).

2.6 Cas avec a et b constants

On suppose dans cette sous-partie que les fonctions a et b sont constantes égales à $a_0 \in \mathbb{K}$ et à $b_0 \in \mathbb{K}$ respectivement :

$$E : \quad y' + a_0 y = b_0$$

Dans ce cas, l'intervalle d'étude est $I = \mathbb{R}$. Trouver toutes les solutions de l'équation homogène E_H n'est pas difficile. Pour trouver une solution particulière de E , on cherche toujours une solution évidente :

$$y_p(t) = \begin{cases} b_0 t & \text{si } a_0 = 0 \\ \frac{b_0}{a_0} & \text{si } a_0 \neq 0 \end{cases}$$

9.10 ★ Résoudre $y' + 2iy = -3$.

Solution.

3 ED linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans cette partie, on s'intéresse aux ED linéaires du second ordre à coefficients constants :

$$E : ay'' + by' + cy = d(x)$$

L'équation homogène associée est

$$E_H : ay'' + by' + cy = 0$$

Remarque. Les fonctions d que l'on étudiera seront toujours définies sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, pour une ED linéaire d'ordre 2, l'intervalle d'étude I sera toujours égal à $\mathbb{R}$.

Hypothèse

On suppose $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. De plus, $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction *continue* donnée.

La méthode de résolution va être similaire à l'ordre 1 (vue en Section section 2.2).

3.1 Étape 1 : solution générale de E_H

On associe à l'ED E son équation caractéristique

$$(\text{Car}) : aX^2 + bX + c = 0$$

On obtient (Car) à partir de E avec les substitutions $\begin{cases} y \rightarrow 1 \\ y' \rightarrow X \\ y'' \rightarrow X^2 \end{cases}$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Lorsqu'une des valeurs a, b ou c est un complexe non réel, on doit se placer sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 9.11 – Résolution de $E_H, \mathbb{K} = \mathbb{C}$

On calcule le discriminant de (Car) :

$$\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$$

- Si $\Delta \neq 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines (complexes) de (Car). Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$y_H(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$

- Si $\Delta = 0$, on note $r_0 = -\frac{b}{2a}$ l'unique racine (complexe) de (Car). Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{r_0 x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$

Lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$ il faut se placer sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on cherche des solutions de l'équation E qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

9.12 ★ Résoudre $y'' + iy' + 2y = 0$

Solution.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Théorème 9.13 – Résolution de E_H , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On calcule le discriminant de (Car) :

$$\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines réelles de (Car). Alors y_H est solution de E_H si et seulement si

$$y_H(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = 0$, on note $r_0 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ l'unique racine réelle de (Car). Alors y_H est solution de E_H si et seulement si

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{r_0 x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta < 0$, on note $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées de (Car) avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors y_H est solution de E_H si et seulement si

$$y_H(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

On notera que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toutes les solutions y_H sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (car $A, B, r_1, r_2, r, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Exemple. Résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$

Exemple. Résoudre $y'' + 2y' + 5y = 0$

3.2 Étape 2 : solution particulière de E

On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

Au programme de MPSI, on ne traite que certains cas particuliers de fonctions d .

Méthode – **Forme de y_p avec $d(t) = e^{qt}$**

Exemple. Résoudre $y'' + 2y' + 5y = e^{-2x}$.

On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = e^{-x}(A \cos(2x) + B \sin(2x)) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^x$.

On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^x \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Méthode – **Forme de y_p avec d un polynôme en t**

Si $c = b = 0$, alors $ay'' = P(t)$: on obtient y_p en intégrant deux fois $\frac{1}{a}P$ (on aura un polynôme de degré $n + 2$).

Exemple. Résoudre $y'' + 4y' + 4y = x^2$.

On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{-2x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple. Résoudre $y'' + 4y' = 1$.

On peut montrer que les solutions de l'équation homogène sont

$$y_H(x) = A + Be^{-4x} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

3.3 Principe de superposition

Théorème 9.14 – Principe de superposition

Soit $d_1, d_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues. On suppose que

$$y_{p,1} : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ est une solution de } ay'' + by' + cy = d_1(t)$$

$$y_{p,2} : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ est une solution de } ay'' + by' + cy = d_2(t)$$

Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda y_{p,1} + \mu y_{p,2} \text{ est une solution de } ay'' + by' + cy = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

Démonstration. On sait que

$$\begin{cases} ay''_{p,1} + by'_{p,1} + cy_{p,1} = d_1(t) \\ ay''_{p,2} + by'_{p,2} + cy_{p,2} = d_2(t) \end{cases}$$

On multiplie la première ligne par λ , la seconde par μ , et on les additionne. On obtient alors

$$a(\lambda y''_{p,1} + \mu y''_{p,2}) + b(\lambda y'_{p,1} + \mu y'_{p,2}) + c(\lambda y_{p,1} + \mu y_{p,2}) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

d'où, en posant $z = \lambda y_{p,1} + \mu y_{p,2}$, on obtient :

$$az'' + bz' + cz = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

et donc z est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$. □

Le principe de superposition se généralise à des ED linéaires de tout ordre, mais pour cette année, il est suffisant de le voir pour l'ordre 2. Grâce au principe de superposition, on peut traiter des cas de fonctions d plus variés.

Exemple. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = \sinh x$.

On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^x \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

3.4 Conditions initiales

Définition 9.15 – Problème de Cauchy (ordre 2)

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, $d : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $(t_0, \alpha_0, \alpha_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Le système

$$(PC) : \begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t) \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{cases}$$

est appelé un problème de Cauchy (linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants).

Théorème 9.16 – Théorème de Cauchy-Lipschitz (ordre 2)

Pour chaque triplet $(t_0, \alpha_0, \alpha_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution $y : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Comme pour l'ordre 1, pour résoudre un problème de Cauchy, on trouve d'abord la solution générale de l'équation (qui dépend de deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$). Puis on détermine quelle (unique) valeur du couple (A, B) permet de vérifier les conditions initiales. À l'ordre 2, comme il y a deux constantes, il faut une condition sur $y(t_0)$ et une sur $y'(t_0)$.

Exemple. Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

On a vu à l'section 3.2 que les solutions de l'équation $y'' - 4y' + 3y = e^x$ sont les fonctions

$$y(x) = -\frac{1}{2}xe^x + Ae^{3x} + Be^x \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

4 Compléments

4.1 Une conséquence de Cauchy-Lipschitz (ordre 1)

On considère l'ED linéaire d'ordre 1

$$y' + a(t)y = b(t)$$

avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues.

Théorème 9.17

Soit y_1 et y_2 deux solutions de $y' + a(t)y = b(t)$ sur I . S'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors $y_1 = y_2$ sur I .

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{K}$ la valeur telle que $y_1(t_0) = y_2(t_0) = z$. Alors y_1 et y_2 sont solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = z \end{cases}$$

Or, la solution de ce problème est unique par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, $y_1 = y_2$. □

Ce résultat est encore vrai pour des ED linéaires d'ordre 2 : si deux solutions sont égales en un point t_0 , elles sont égales en tout point d'un intervalle d'étude qui contient t_0 .

4.2 ED d'ordre 1 non résolue : $r(t)y' + a(t)y = b(t)$ – raccord de solution

On considère une ED d'ordre 1 sous forme non résolue

$$E : r(t)y' + a(t)y = b(t)$$

On la résout sur un intervalle d'étude I . Si r ne s'annule pas sur I , alors en divisant l'équation par $r(t)$ on se ramène à une forme résolue. Mais comment faire si r s'annule sur un ou plusieurs points de I ? Pour simplifier, on suppose ici que

- $I = \mathbb{R}$
- r ne s'annule qu'en un seul point t_0 de I , avec $t_0 = 0$.

Méthode – Raccorder une solution

On veut résoudre $E : r(t)y' + a(t)y = b(t)$ sur $\mathbb{R}$ dans le cas où r s'annule uniquement en 0.

- **On résout E sur chaque intervalle où r ne s'annule pas.** On peut alors diviser par $r(t)$ et mettre l'équation sous forme résolue :

– On résout E sur $] -\infty, 0[$: toutes les solutions sont les fonctions

$$(\forall x \in \mathbb{R}_-^*) \quad y(x) = (\dots) + C_1(\dots) \quad \text{avec } C_1 \in \mathbb{K}$$

– On résout E sur $]0, +\infty[$: toutes les solutions sont les fonctions

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad y(x) = (\dots) + C_2(\dots) \quad \text{avec } C_2 \in \mathbb{K}$$

- **On détermine la condition que donne E au point où r s'annule :** en $t = 0$, l'équation donne :
 $a(0)y(0) = b(0)$, ce qui, si $a(0) \neq 0$, entraîne que $y(0) = \frac{b(0)}{a(0)}$.

Ainsi, si y est solution de E , nécessairement il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{K}$ tels que :

$$y(x) = \begin{cases} (\dots) + C_1(\dots) & \text{si } x < 0 \\ (\dots) + C_2(\dots) & \text{si } x > 0 \\ \frac{b(0)}{a(0)} & \text{si } x = 0 \text{ et } a(0) \neq 0 \end{cases}$$

- On cherche des **conditions sur C_1 et C_2 pour que y soit continue et dérivable en 0.** Cela s'appelle **raccorder** une solution.

9.18 ★★ Résoudre $E : t^2 y' - y = 0$.

Solution.

En quelque sorte, le type de raisonnement est une analyse-synthèse : à ce stade, on a fini l'analyse. Pour qu'une fonction y soit solution, elle doit nécessairement vérifier les conditions ci-dessus pour $y(t)$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite pour quelles valeurs de C_1 et C_2 est-ce que la fonction y est bien solution de E . C'est la synthèse.

Mais que faut-il vérifier pour s'assurer que y soit solution de E ? Par construction, y est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et est solution sur $\mathbb{R}_-^*$. Idem pour $\mathbb{R}_+^*$. Il reste à vérifier que y est dérivable en 0 et vérifie l'équation E en $t = 0$. Or, la valeur de $y(0)$ a été choisie de façon à vérifier l'équation E en $t = 0$. Donc, **la seule chose à vérifier est que y soit continue et dérivable en 0.**

En pratique, on commence par vérifier la continuité en 0, puis la dérivabilité en 0.

Solution (Suite).

Remarque. Dans le cas général, on peut avoir $I \neq \mathbb{R}$ ou $t_0 \neq 0$. De plus, la fonction r peut s'annuler en plusieurs points de I . La méthode est néanmoins similaire : on résout E sur chaque intervalle où r ne s'annule pas, on obtient une constante par intervalle, et on cherche des conditions sur ces constantes pour raccorder y en chaque point où r s'annule.

4.3 Les “astuces” des physiciens... (HORS PROGRAMME)

Pour résoudre des ED, nos amis les physiciens emploient parfois des méthodes “aventureuses” pour un matheux... La méthode physicienne décrite ci-dessous ne doit PAS être écrite sur une copie de maths. Néanmoins, elle admet un équivalent mathématique rigoureux, si bien qu'elle conduit au bon résultat.

On considère l'ED définie sur $I = \mathbb{R}_+$

$$y' + a(t)y = 0$$

Les physiciens cherchent les solutions y qui sont strictement positives, càd telles que $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad y(t) > 0$.

Version physicienne	Version mathématique	
$\frac{dy}{dt} = -a(t)y$	$y' = -a(t)y$	
$\frac{dy}{y} = -a(t)dt$	$\frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t)$	$y(t) \neq 0$ pour tout t donc on peut diviser par $y(t)$
$\int \frac{dy}{y} = - \int a(t)dt$	$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds = - \int_0^t a(s)ds$	On intègre entre 0 et t des fonctions continues
	$[\ln y(s)]_0^t = -[A(s)]_0^t$	
	$\ln y(t) - \ln y(0) = -A(t) + A(0)$	$ y(t) = y(t) \quad \text{et} \quad y(0) = y(0)$
$\ln y = -A(t) + K$	$\ln y(t) = -A(t) + K$	avec $K = \ln y(0) + A(0)$
	$y(t) = e^K e^{-A(t)}$	
	$y(t) = C e^{-A(t)}$	avec $C = e^K > 0$

On trouve ainsi toutes les solutions strictement positives de $y' + a(t)y = 0$

5 Méthodes pour les exercices

Méthode – Résolution d'une ED linéaire

Pour résoudre une ED linéaire d'ordre 1 ou 2 :

0. On détermine $\mathbb{K}$ (sans l'écrire) et un intervalle d'étude I (qu'on écrit).
1. On trouve une **solution générale**, notée y_H , **de l'équation homogène** E_H , qui dépendra d'une constante $C \in \mathbb{K}$ pour une ED d'ordre 1, ou de deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$ pour une ED d'ordre 2.
2. On trouve une **solution particulière**, notée y_p , de l'équation E . Pour cela, on peut :
 - Trouver une solution évidente.
 - Si E est d'ordre 1, utiliser la **variation de la constante**.
 - Si E est d'ordre 2, chercher une fonction y_p sous une forme "similaire" au second membre (seuls le cas "polynômial" ou " $t \mapsto e^{qt}$ " sont au programme)
 - Si E est d'ordre 2, on peut utiliser le **principe de superposition** pour se ramener à des seconds membres qui sont des polynômes ou des fonctions $t \mapsto e^{qt}$
3. On forme la solution (générale) de l'équation E en additionnant y_p et y_H .
4. S'il y a une ou plusieurs **conditions initiales** à vérifier, on cherche les valeurs des constantes A, B ou C qui permettent de les vérifier.